

Κριτήριο αξιολόγησης στην απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

2025-2026

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha = |x| - 2$, $\beta = x - 2$, $\gamma = |x - 2|$ όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

1. Να γράψετε τη παράσταση $A = \frac{|x-2|}{x-2}$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

10 Μονάδες

2. Αν $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $|\beta + 1| + \gamma = 1$.

20 Μονάδες

3. Κάνοντας χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $\gamma < 1$ και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

10 Μονάδες

4. Να δείξετε ότι $\alpha \geq \beta$.

5 Μονάδες

5. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 2$ ισχύει ότι $\alpha = \gamma$.

10 Μονάδες

6. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $\alpha + 4 = \gamma$.

10 Μονάδες

7. Να δείξετε ότι $|\beta^2 + 4x| - 2|\alpha^2 - x^2 - 4| + 12 = (\alpha - 2)^2$.

15 Μονάδες

8. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x για τις οποίες $|\alpha - \beta + \gamma| = 1 - x$.

20 Μονάδες

Καλή τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

$$1. A = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{|x-2|}{x-2}$$

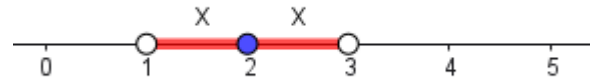
$$\text{Αν } x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ τότε } A = \frac{x-2}{x-2} = 1, \text{ ενώ αν } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ τότε } A = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1,$$

$$2. \text{Είναι } |\beta+1| + \gamma = |x-2+1| + |x-2| = |x-1| + |x-2|$$

$$\text{Είναι } 1 < x < 2 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 1 \text{ και } 1 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 0, \text{ οπότε } |\beta+1| + \gamma = \cancel{x-1} - \cancel{x} + 2 = 1$$

$$3. \gamma < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow d(x, 2) < 1$$

Επειδή ο αριθμός x απέχει από το 2 απόσταση λιγότερη από 1, και σε απόσταση 1 από το 2 είναι το 1 και το 3, ο x θα είναι κάποιος αριθμός λίγο μετά το 1 και λίγο πριν το 3, δηλαδή $x \in (1, 3)$.



$$4. \alpha \geq \beta \Leftrightarrow |x| - \cancel{2} \geq x - \cancel{2} \Leftrightarrow |x| \geq x \text{ ισχύει}$$

$$5. \text{Είναι } \alpha = \gamma \Leftrightarrow |x| - 2 = |x-2| \stackrel{x \geq 2}{\Leftrightarrow} x - 2 = x - 2 \text{ ισχύει}$$

$$6. \alpha + 4 = \gamma \Leftrightarrow |x| - 2 + 4 = |x-2| \Leftrightarrow |x| + 2 = |x-2| \Leftrightarrow (|x| + 2)^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + \cancel{4} = x^2 - 4x + \cancel{4} \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 4|x| = \cancel{x^2} - 4x \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$7. |\beta^2 + 4x| - 2|\alpha^2 - x^2 - 4| + 12 = (\alpha - 2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4x - 2(|x-2|^2 - x^2 - 4) + 12 = (|x-2-2|)^2 \Leftrightarrow |x^2 - \cancel{4x} + 4 + \cancel{4x}| - 2| \cancel{x^2} - 4|x| + \cancel{4} - \cancel{x^2} - \cancel{4} | + 12 = (|x-4|)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 - 2 \cdot 4|x| + 12 = |x|^2 - 8|x| + 16 \Leftrightarrow x^2 - 8|x| + 16 = x^2 - 8|x| + 16 \text{ ισχύει}$$

$$8. |\alpha - \beta + \gamma| = 1 - x \Leftrightarrow ||x| - 2 - (x-2)| + |x-2| = 1 - x \Leftrightarrow ||x| - \cancel{2} - x + \cancel{2}| + |x-2| = 1 - x \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι $|x| \geq x \Leftrightarrow |x| - x \geq 0$ και επειδή $|x-2| \geq 0$, είναι $|x| - x + |x-2| \geq 0$, οπότε η (1) γίνεται:

$$|x| - \cancel{x} + |x-2| = 1 - \cancel{x} \Leftrightarrow d(x, 0) + d(x, 2) = 1 \quad (2)$$

Έστω A το σημείο που αντιστοιχεί στο 0 και B το σημείο που αντιστοιχεί στο 2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Αν M είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο x , τότε η (2) γράφεται $(MA) + (MB) = 2$.

Αν το M βρίσκεται στην ημιευθεία Bx εκτός του B, τότε $(MA) > (BA) = 2$, οπότε $(MA) + (MB) > 2$.

Αν το M βρίσκεται στην ημιευθεία Ax εκτός του A, τότε $(MB) > (AB) = 2$ και $(MA) + (MB) > 2$.

Αν το M είναι σημείο του τμήματος AB, τότε $(MA) + (MB) = (AB) = 2$, άρα $x \in [0, 2]$.

